الفصل الثاني : **تحويل لا بلاس**

Laplace transform

(أربع محاضرات، محاضرة اسبوعياً)

تمهيد: لتحويل لا بلاس دور مميز وأساسي في معظم الاختصاصات الهندسية، وخاصة في تحليل وتصميم النظم الهندسية

2.1) **تحويل لا بلاس** (The Laplace Transform)

ليكن t متحول حقيقي يرمز للزمن و $f(t)$ دالة حقيقية تابعة لـ t حيث $t \geq 0$ و يرمز لتحويل لا بلاس لهذه الدالة بـ $F(s)$ (أو بـ $L[f(t)]$) حيث s متحول عقدي ، ويعرف بالتكامل المعتل التالي:

$$\boxed{L[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (2.1-1)}$$

يكون هذا **التحويل موجوداً إذا كان التكامل المعتل** $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^{r} e^{-st} f(t)dt$ **موجوداً** .

ملاحظة(2.1-1): بما أن التكامل في تحويل لا بلاس يبدأ من الصفر، فإن $F(s)$ يتضمن معلومات عن سلوك $f(t)$ من أجل $t \geq 0$ من ناحية أخرى، بما أنه في التطبيقات الهندسية يكون s متحول حقيقي ولذلك سنقتصر الدراسة هنا على هذه الحالة.

مبرهنة (2.1-1) :
إذا كانت الدالة $f(t)$ معرفة ومستمرة أو مستمرة جزئياً ضمن أي مجال جزئي منته من المجال $0 \leq t < \infty$ وإذا حققت الدالة $f(t)$ المتباينة $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ من أجل كل $t \geq 0$ ومن أجل أي ثابتين حقيقيين $M \,\&\, \alpha$ فإن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)$ موجود اً من أجل كل $\boxed{s > \alpha}$.
سؤال هام :كيف تتأكد أن للدالة $f(t)$ تحويل لا بلاس قبل محاولة تعينه إذا كان موجوداً ؟

ملاحظة (2.1-2):
في المسائل التطبيقية ، قد يوجد عدد حقيقي وليكن s_0 لأجله يكون تحويل لا بلاس للدالة $f(t)$ موجوداً من أجل كل $s > s_0$ وغير موجود من أجل كل $s \leq s_0$.

مثلاً ،

1) الدالة $f(t) = e^{t^2}$ مستمرة ولكن سرعة تزايدها أكبر من سرعة تزايد الدالة $g(t) = Me^{\alpha t}$ مهما تكن قيم $M \,\&\, \alpha$ وبالتالي ليس لهذه الدالة تحويل لا بلاس ،

2) الدالة $h(t)=t^n; n=0,1,2,\cdots$ مستمرة وتحقق المتباينة

$$h(t)=t^n < n!e^{1t}, for\ all\ t>0\ \&\ n=0,1,2,\cdots$$

وذلك لأن $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots>\frac{t^n}{n!}$ وهذا يعني أن تحويل لا بلاس لهذه الدالة موجوداً من أجل $s>1$

3) للدالة $k(t)=e^{3t}$ تحويل لا بلاس من أجل $s>3$ لأنها مستمرة وأسية، وللدالة $p(t)=e^{-2t}$ تحويل لا بلاس من أجل $s>-2$ لأنها مستمرة وأسية

مثال (2.1-1) : عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)=c$ حيث c عدد ثابت.

الحل: الدالة مستمرة من أجل $t\geq 0$ وأن $f(t)=c\leq ce^{0t}$ ، وبالتالي تحويل لا بلاس لهذه الدالة موجود من أجل $s>0$. بتطبيق تعريف تحويل لا بلاس على هذه الدالة نحصل على:

$$L[c]=\int_0^{\infty}e^{-st}c\,dt=\lim_{r\to\infty}\int_0^{r}e^{-st}c\,dt=\lim_{r\to\infty}[-\frac{c}{s}e^{-st}]_{t=0}^{r}=\lim_{r\to\infty}[\frac{c}{s}-\frac{c}{s}e^{-sr}]=\frac{c}{s}[1-\lim_{r\to\infty}e^{-sr}]$$
$$=\frac{c}{s}(1-0)=\frac{c}{s}\quad ;s>0$$

هذا يعني أن

$$\boxed{f(t)=c\Rightarrow L[c]=\frac{c}{s};\quad s>0}$$

مثال (2.1-2) : عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)$ المعرفة كما يلي: $f(t)=t;\quad t\geq 0$

الحل: تحويل لا بلاس لهذه الدالة موجود من أجل $s>0$ لأن هذه الدالة مستمرة وتحقق المتباينة $f(t)=t<e^t\quad ; t\geq 0$ وتحويل لا بلاس لهذه الدالة يعين(بتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة) كما يلي :

$$L[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{L}[\mathrm{t}]=\int_0^{\infty}e^{-st}t\,dt=\lim_{r\to\infty}\int_0^{r}e^{-st}t\,dt=\lim_{r\to\infty}[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{e^{-st}}{s^2}]_{t=0}^{r}$$
$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\lim_{r\to\infty}re^{-sr}-\frac{1}{s^2}\lim_{r\to\infty}e^{-sr}=\frac{1}{s^2}\ \ if\ \ s>0$$

هذا يعني أن

$$\boxed{f(t)=t;\quad t\geq 0\quad\Rightarrow\quad L[\mathrm{t}]=F(s)=\frac{1}{s^2}\ ;\ s>0}$$

مثال (2.1-3): عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)=e^{kt}\ ;t\geq 0$.

الحل: هذه الدالة مستمرة وأسية في المجال $t \geq 0$ ، وتحويل لا بلاس لها موجود من أجل $s > k$ (لماذا؟) ويعين كما يلي:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{kt} dt = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-(s-k)t} dt = -\frac{1}{s-k} \lim_{r \to \infty} [e^{-(s-k)t}]_0^r$$

$$= \frac{1}{s-k}[1 - \lim_{r \to \infty} e^{-(s-k)r}] = \frac{1}{s-k} \; ; s-k > 0$$

$$= \frac{1}{s-k} \quad ; \quad s > k$$

هذا يعني $\boxed{f(t) = e^{kt} \quad \Rightarrow \quad F(s) = L[e^{kt}] = 1/(s-k) \; ; \quad s > k}$

فمثلاً،

$$1) L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2} \quad ; s > 2 \quad , \quad 2) L\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad ; s > -3, \quad 3) L\left[e^{2it}\right] = \frac{1}{s-2i} \quad ; s > 0$$

(2.2) **خواص تحويل لا بلاس** (Properties of the Laplace transform)

نعرض في هذه الفقرة بعض خواص تحويل لا بلاس التي تفيدنا في تعيين تحويل لا بلاس لدالة تساوي مجموع عدد منته من الدوال الرياضية البسيطة أو لدالة تساوي جداء دالتين أو غير ذلك من العلاقات الرياضية ، من هذه الخواص :

أولاً- **الخاصة الخطية** (The linearity property):

إذا كانت الدالتين $F(s) \& G(s)$ هما على الترتيب تحويلي لا بلاس للدالتين $f(t) \& g(t)$ من أجل $s > s_0$ فإنه من أجل أي عددين ثابتين $\alpha \& \beta$ يكون

$$\boxed{L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \;\; \text{for} \;\; s > s_0}$$

فمثلاً،

$$L[\cos at] = L[(e^{iat} + e^{-iat})/2] = \frac{1}{2} L[e^{iat}] + \frac{1}{2} L[e^{-iat}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{s+ia+s-ia}{s^2+a^2}] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad ; \quad s > 0$$

$$L[\sin at] = L[\frac{e^{i(at)} - e^{-i(at)}}{2i}] = \frac{1}{2i}[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}] = \frac{a}{s^2+a^2} \quad ; \quad s > 0$$

هذا يعني أن $\boxed{L[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}\,;s>0 \quad \& \quad L[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}\,;s>0}$

كذلك
$$L[\cosh at]=L[\frac{e^{at}}{2}+\frac{e^{-at}}{2}]=\frac{1}{2}L[e^{at}]+\frac{1}{2}L[e^{-at}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}]=\frac{s}{s^2-a^2} \quad ;s>a$$

$$L[\sinh at]=L[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}]=\frac{1}{2}L[e^{at}]-\frac{1}{2}L[e^{-at}]=\frac{a}{s^2-a^2}\,;s>a$$

هذا يعني أن $\boxed{L[\sinh at]=\frac{a}{s^2-a^2} \quad \& \quad L[\cosh at]=\frac{s}{s^2-a^2} \quad ;s>a}$

مثال (2.2-1): عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)=3-4t+5\cos 2t+6e^{3t}$

الحل: إن

$$L[3]=\frac{3}{s}\,;s>0\,,\,L[t]=\frac{1}{s^2}\,;s>0\,, \quad L[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4}\,;s>0 \quad \& \ L[e^{3t}]=\frac{1}{s-3} \quad ;s>3$$

وأن

$$L[3-4t+5\cos 2t+6e^{3t}]=3L[1]-4L[t]+5L[\cos 2t]+6L[e^{3t}]$$
$$=\frac{3}{s}-\frac{4}{s^2}+\frac{5s}{s^2+4}+\frac{6}{s-3} \quad ; \quad s>3$$

لأن $\{s>0\,\&\,s>3\}\Rightarrow s>\max\{0,3\}\Rightarrow s>3$

ثانياً- **خاصية الإزاحة الأولى** (The first shift property)

إذا كانت $F(s)$ تحويل لا بلاس للدالة $f(t)$ من أجل $s>s_0$ فتحويل لا بلاس للدالة $g(t)=e^{at}f(t)$ هو

$$\boxed{G(s)=L[g(t)]=L[e^{at}f(t)]=F(s-a); \quad s>s_0+\mathrm{Re}(a)}$$

فمثلاً ، تحويل لا بلاس للدالة $f(t)=t$ هو الدالة $F(s)=\frac{1}{s^2};\ s>0$ وبالتالي تحويل لا بلاس للدالة $g(t)=te^{-2t}$ (حيث $a=-2$) هو

$$L[te^{-2t}]=L[e^{-2t}t]=\frac{1}{(s+2)^2} \quad ; \quad s>-2$$

مثال (2.2-2): أوجد تحويل لا بلاس للدالة $g(t)=e^{-3t}\sin 2t$

الحل: نعلم أن $L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}\,;s>0$ وبالتالي $L[g(t)]=L[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4} \ ; \ s>-3$

ملاحظة (2.2-1)
بالاعتماد على هذه الخاصة يمكن التأكد من صحة العلاقتين التاليتين:

$$\boxed{1)L[e^{-kt}\sin at]=\frac{a}{(s+k)^2+a^2}\ ;\ s>-k\ ,\qquad 2)L[e^{-kt}\cos at]=\frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}\ ;\ s>-k}$$

حيث $a\,\&\,k$ ثابتين حقيقيين

ثالثاً – **خاصية مشتق تحويل لا بلاس** (Derivative-of-transform property):
إذا كان $F(s)$ تحويل لا بلاس لـ $f(t)$ من أجل $s>s_0$ فإن تحويل لا بلاس للدالة $g(t)=t^n f(t)$ هو

$$\boxed{L[g(t)]=L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}\ ;\quad s>s_0\ ,\quad for\quad n=0,1,2,\cdots}$$

فمثلاً ،
$$L[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+9}\Rightarrow L[t\sin 3t]=(-1)\frac{d}{ds}(\frac{3}{s^2+9})=-\frac{0-(2s)(3)}{(s^2+9)^2}=\frac{2s}{(s^2+9)^2}\ ;s>0$$

مثال (2.2-3): أوجد تحويل لا بلاس للدالة $g(t)=t^2e^{2t}$

الحل: إن
$$L[e^{2t}]=\frac{1}{s-2};\quad s>2\qquad\Rightarrow\quad L[t^2e^{2t}]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}[\frac{1}{s-2}]=\frac{2}{(s-2)^2}\ ;\ s>2$$

مثال (2.2-4): عيّن تحويل لا بلاس للدالة $g(t)=t^n\ ;n=0,1,2,\cdots$

الحل: بما ان $g(t)=t^n\times 1$ وبما أن $L[1]=\frac{1}{s};s>0$ فإن

$$L[g(t)]=\mathrm{L}[t^n\times 1]=(-1)^n\cdot\frac{d^n}{ds}(\frac{1}{s})=(-1)^n\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(-s^{-2})=(-1)^{n-1}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}[\frac{d}{ds}(s^{-2})]$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}(-2s^{-3})=(-1)^{n-2}(1)(2)\frac{d^{n-3}}{ds^{n-3}}\frac{d}{ds}(s^{-3})=\cdots=\frac{n!}{s^{n+1}};s>0$$

هذا يعني أن $\boxed{L[t^n]=n!/s^{n+1};\quad n=0,1,2,3,\cdots}$

ملاحظة (2.2-2) : تحويلات لا بلاس لبعض الدوال الرياضية البسيطة التي اشير إليها في الفقرتين السابقتين، يمكن اعتبارها علاقات قياسية تُستخدم في حل المسائل التطبيقية المتعلقة بتحويل لا بلاس ،مع ذلك نرتبها ضمن الجدول التالي:

$f(t)$ الدالة	$L[f(t)]=F(s)$ تحويل لا بلاس	*region of existence*
1) $f(t)=c, c \text{ is a const.}$	$F(s)=c/s$	$s>0$
2) $f(t)=t$	$F(s)=1/s^2$	$s>0$
3) $f(t)=t^n\ ; n=0,1.2,\cdots$	$F(s)=n!/s^{n+1}\ ; 0!=1\ \&\ n=0,1,2,\cdots$	$s>0$
4) $f(t)=e^{kt}$	$F(s)=1/(s-k)$	$s>k$
5) $f(t)=\sin at$	$F(s)=a/(s^2+a^2)$	$s>0$
6) $f(t)=\cos at$	$F(s)=s/(s^2+a^2)$	$s>0$
7) $f(t)=\sinh at$	$F(s)=a/(s^2-a^2)$	$s>a$
8) $f(t)=\cosh at$	$F(s)=s/(s^2-a^2)$	$s>a$

وإذا كان $g(t)=e^{at}f(t)$ و $L[f(t)]=F(s)$ فإن $L[g(t)]=L[e^{at}\,\mathrm{f(t)}]=F(s-a)$
بالاستفادة من هذه الخاصية نحصل على العلاقات القياسية التالية:

$$9)\ \mathrm{L}[\mathrm{e}^{-kt}\sin at]=\frac{a}{(s+k)^2+a^2}\quad ;\quad L[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$10)\ L[e^{-kt}\cos at]=\frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}\ ;\quad L[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$11)\ L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)\quad ;\quad L[f(t)]=F(s)$$

(2.3) **تحويل لا بلاس العكسي** (The inverse Laplace transform)

ذكرنا سابقاً أن تحويل لا بلاس $F(s)=\mathrm{L[f(t)]}$ يحدد سلوك $f(t)$ من أجل $t\geq 0$ ، وبالتالي إذا كان تحويل لا بلاس $L[f(t)]=F(s)$ معلوماً فإن تحويل لا بلاس العكسي الذي يرمز له بـ $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ يحقق المساواة التالية $\boxed{f(t)=L^{-1}[F(s)]\quad ,\ only\ for\quad t\geq 0}$.

الخاصة الخطية لتحويل لا بلاس العكسي :

نعلم أن $L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s)$

وبالتالي $L^{-1}[\alpha F(s)+\beta G(s)]=\alpha f(t)+\beta g(t)=\alpha L^{-1}[F(s)]+\beta L^{-1}[G(s)]$ وهذا يعني أن

$$\boxed{L^{-1}[\alpha F(s)+\beta G(s)]=\alpha L^{-1}[F(s)]+\beta L^{-1}[G(s)]}$$

ملاحظة هامة : بالاستفادة من جدول تحويلات لا بلاس يمكن ترتيب جدول بتحويلات لا بلاس العكسية، وبالاستفادة من الخاصة الخطية ومن العلاقات القياسية لتحويل لا بلاس العادية أو العكسية بعد استخدام قاعدة الكسور الجزئية يمكن تعيين تحويل لا بلاس العكسي لأي دالة $F(s)$

فمثلاً، نعلم أن $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$ وبالتالي $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)=e^{at}L^{-1}[F(s)]$
بالاستفادة من هذه الخاصة نعين الدوال العكسية التالية

$$1)L^{-1}[\frac{2}{(s+3)^2+4}]=e^{-3t}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=e^{-3t}\sin 2t,$$

$$2)L^{-1}[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}]=e^{3t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]=e^{3t}\cos 2t$$

$$3)L^{-1}[\frac{s}{(s-3)^2+4}]=L^{-1}[\frac{(s-3)+3}{(s-3)^2+4}]=L^{-1}[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}]+\frac{3}{2}L^{-1}[\frac{2}{(s-3)^2+4}]$$

$$=e^{3t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]+\frac{3}{2}e^{3t}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=e^{3t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{3t}\sin 2t$$

ونعلم أن $L[t^nf(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}\quad ; \quad L[f(t)]=F(s)\quad \Rightarrow L^{-1}[(-1)^nF^{(n)}(s)]=t^nf(t)$

وإذا كان $f(t)=e^{at}$ فإن $L^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at}$ $\Rightarrow$ $L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$ وبالتالي

$$4)L^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at}\Rightarrow L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^2}]=te^{at}\Rightarrow L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^3}]=\frac{1}{2!}t^2e^{at}\qquad\Rightarrow$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^4}]=\frac{1}{3!}t^3e^{at}\Rightarrow\quad\cdots\quad\Rightarrow L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^n}]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}\quad ;n=1,2,3,\cdots$$

$$\boxed{L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^n}]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}\quad ;n=1,2,3,\cdots\quad OR\quad L[t^{n-1}e^{at}]=\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}}$$

مثال (2.3-1): عيّن الدالة $f(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو الدالة $F(s)=\frac{s+6}{s^2+4}$

الحل: الدالة $F(s)=\frac{s+6}{s^2+4}$ ليست تحويل لا بلاس لدالة قياسية ، ولكن تكتب هذه الدالة ويعين تحويل لا بلاس العكسي لها كما يلي:

$$F(s)=\frac{s+6}{s^2+4}=\frac{s}{s^2+4}+(3)\frac{2}{s^2+4}\quad\Leftrightarrow\quad f(t)=L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]+3L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=\cos 2t+3\sin 2t$$

حيث $s>0$ و $t\geq 0$

مثال (2.3-2): عيّن الدالة $f(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو الدالة $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s-6}$

الحل: الدالة $F(s)$ ليست تحويل لا بلاس لدالة قياسية، لكنها تُكتب ويعين تحول لا بلاس العكسي لها كما يلي:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+s-6}=\frac{1}{(s+3)(s-2)}=\frac{-1/5}{s+3}+\frac{1/5}{s-2} \quad\Leftrightarrow\quad f(t)=-\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$$

حيث $s>2$ (لماذا ؟) و $t\geq 0$

مثال (2.3-3): عيّن الدالة $f(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو الدالة $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s^2+9)}$.

الحل: الدالة $F(s)$ ليست تحويل لا بلاس لدالة قياسية، لكنها تُكتب ويعين تحول لا بلاس العكسي لها كما يلي:

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c\,s+d}{s^2+9}=\frac{1/9}{s}+\frac{1/9}{s^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{s+1}{s^2+9}$$
$$=\frac{1/9}{s}+\frac{1/9}{s^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{s^2+9} \quad\Leftrightarrow\quad f(t)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}t-\frac{1}{9}\cos 3t-\frac{1}{27}\sin 3t$$

حيث $s>0$ و $t\geq 0$

مثال (2.3-4): عيّن الدالة $f(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو الدالة $F(s)=\dfrac{s+7}{s^2+6s+13}$

الحل: الدالة $F(s)$ ليست تحويل لا بلاس لدالة قياسية، لكنها تُكتب ويعين تحول لا بلاس العكسي لها كما يلي:

$$F(s)=\frac{s+7}{s^2+6s+13}=\frac{s+7}{(s+3)^2+4}=\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}+(2)\cdot\frac{2}{(s+3)^2+2^2} \quad\Leftrightarrow$$
$$f(t)=e^{-3t}\cos 2t+2e^{-3t}\sin 2t$$

مثال (2.3-5): عيّن الدالة $f(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو الدالة $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$

الحل: الدالة $F(s)$ ليست تحويل لا بلاس لدالة قياسية، لكنها تُكتب و يعين تحول لا بلاس العكسي لها كما **يلي:**

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{(s+1)^2}+\frac{cs+d}{s^2+4}=\frac{2/25}{s+1}+\frac{1/5}{(s+1)^2}+\frac{-1/25(2s+3)}{s^2+4}$$
$$=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{2}{25}\cdot\frac{s}{s^2+4}-\frac{3}{50}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

$$f(t)=\frac{2}{25}e^{-t}L^{-1}[\frac{1}{s}]+\frac{1}{5}e^{-t}L^{-1}[\frac{1}{s^2}]-\frac{2}{25}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]-\frac{3}{50}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]$$
$$=\frac{2}{25}e^{-t}+\frac{1}{5}te^{-t}-\frac{2}{25}\cos 2t-\frac{3}{50}\sin 2t$$

(2.4) تحويل لا بلاس لمشتق وتكامل دالة

التطبيقات الهندسية لتحويل لا بلاس كثيرة ومتنوعة، ولكن بعضها يتطلب حساب تحويل لا بلاس لمشتق دالة والبعض الآخر يتطلب حساب تحويل لا بلاس لتكامل دالة

(2.4-1) تحويل لا بلاس لمشتق (Laplace transform of a derivative) :

لتكن الدالة $f(t)\,;t\geq 0$ و $F(s)=L[f(t)]$ تحويل لا بلاس لها، و لتكن $f'(t),f''(t),f'''(t),\cdots$ مشتقات هذه الدالة، والمطلوب حساب تحويل لا بلاس لكل دالة من هذه الدوال. بتطبيق تعريف تحويل لا بلاس لدالة المشتق من المرتبة الأولى نحصل على

$$L[f'(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=[e^{-st}f(t)]_{t=0}^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=sF(s)-f(0)$$

هذا يعني أن، $\boxed{L[f'(t)]=sL[f(t)]-\mathrm{f}(0)}$

بالاعتماد على هذه العلاقة نحصل على العلاقات التالية:

$$L[f''(t)]=sL[f'(t)]-f'(0)=s^2L[f(t)]-sf(0)-f'(0)$$
$$L[f'''(t)]=sL[f''(t)]-f''(0)=s^3L[f(t)]-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$
$$L[f^{(4)}(t)]=sL[f'''(t)]-f'''(0)=s^4L[f(t)]-s^3f(0)-s^2f'(0)-sf''(0)-f'''(0)$$

بشكل عام، من أجل n عدد صحيح موجب فإن

$$\boxed{L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)}$$

مثال (2.4-1): استخدم تحويل لا بلاس في تعيين حل المسألة $\frac{dx}{dt}+5x=e^{-t}\,;x(0)=1$ من أجل $t\geq 0$

الحل: بأخذ تحويل لا بلاس للطرفين نحصل على :

$$L[x'(t)]+5L[x(t)]=L[e^{-t}] \quad \Leftrightarrow \quad sX(s)-x(0)+5X(s)=1/(s+1) \quad \Rightarrow$$
$$X(s)=\frac{s+2}{(s+5)(s+1)}=\frac{3/4}{s+5}+\frac{1/4}{s+1} \quad \Rightarrow \quad x(t)=L^{-1}[X(s)]=(3/4)e^{-5t}+(1/4)e^{-t}$$

لاحظ أن تحويل لا بلاس حوّل المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية.

(2.4-2) **تحويل لا بلاس لتكامل** (Laplace transform of an integral)

في بعض التطبيقات الهندسية يعبر عن سلوك المنظومة الهندسية بمعادلة تفاضلية- تكاملية(مثلاً، معادلة التيار الكهربائي لدارة تضم وعلى التسلسل : مقاومة R ، مكثف C ، ملف L ومولد جهد $E(t)$)

ويكون لدينا المعادلة التفاضلية - التكاملية التالية:
$$L\frac{di}{dt}+R\,i+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t)$$

لحل هذه المعادلة بطريقة تحويل لا بلاس، علينا أن نحسب تحويل لا بلاس لتكامل من الشكل $g(t)=\int_0^t \mathrm{k}(\tau)d\tau$ الذي ينتج عنه التالي: $g(0)=0$ و $g'(t)=k(t)$ وهذا يعني أن

$$\mathrm{K}(s)=L[\mathrm{k}(t)]=L[g'(t)]=sG(s)-g(0)=sG(s)\Rightarrow\frac{1}{s}\mathrm{K}(s)=G(s)=L[g(t)]=L[\int_0^t \mathrm{k}(\tau)d\tau]$$

هذا يعني أن
$$\boxed{1)L[\int_0^t \mathrm{k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau]=\frac{\mathrm{K}(s)}{s} \quad ; \quad K(s)=L[\mathrm{k}(t)]}$$

$$\boxed{2)L^{-1}[\frac{\mathrm{K}(s)}{s}]=\int_0^t \mathrm{k}(\tau)d\tau\,; \quad k(t)=L^{-1}[\mathrm{K}(s)]}$$

مثال (2.4-2) : عيّن تحويل لا بلاس للتكامل $\int_0^t(\tau^3+\sin 2\tau)d\tau$

الحل: بما أن $\mathrm{k}(t)=t^3+\sin 2t$ هي دالة التكامل $\int_0^t(\tau^3+\sin 2\tau)d\tau$ فإن

$$\mathrm{K}(s)=L[\mathrm{k}(t)]=L[t^3]+L[\sin 2t]=\frac{6}{s^4}+\frac{2}{s^2+4} \quad \Rightarrow$$
$$L[\int_0^t(\tau^3+\sin 2\tau)d\tau]=\frac{\mathrm{K}(s)}{s}=\frac{6}{s^5}+\frac{2}{s(s^2+4)}$$

مثال (2.4-3): عيّن تحويل لا بلاس العكسي $f(t)$ إذا علمت أن $L[f(t)]=F(s)=\dfrac{1}{s^3+4s}$

الحل: إن

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+4)}]=L^{-1}[\frac{1/(s^2+4)}{s}]\Rightarrow K(s)=\frac{1}{s^2+4}\Rightarrow k(t)=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=\frac{1}{2}\sin 2t \Rightarrow$$

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+4)}]=L^{-1}[\frac{1/(s^2+4)}{s}]=\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\tau d\tau=-\frac{1}{4}[\cos 2\tau]_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

(2.5) **تحويل لا بلاس لدالة الخطوة الواحدة** (Unit step function)

i) يرمز لهذه الدالة بـ$\mathrm{h}(t-a)$ وتُعرف بالمساواة التالية:

$$\boxed{\mathrm{h}(t-a)=\begin{cases}0 & ; \ t<a\\ 1 & ; \ t\geq a\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad h(t)=\begin{cases}0 & ; \ t<0\\ 1 & ; \ t\geq 0\end{cases}}$$

ii) من أجل أي دالة ولتكن $g(t)$ فإن

$$g(t)\mathrm{h}(t-a)=\begin{cases}0 & ; \ t<a\\ g(t) & ; \ t\geq a\end{cases}$$

iii) إذا كانت $f(t)$ دالة مستمرة جزئياً ومعرفة كما يلي:

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t); & 0\leq t<t_1\\ f_2(t); & t_1\leq t<t_2\\ f_3(t); & t\geq t_2\end{cases}$$

فتُكتب $f(t)$ بدلالة دالة الخطوة الواحدة كما يلي:

$$\boxed{f(t)=f_1(t)\mathrm{h}(t)+[f_2(t)-f_1(t)]\mathrm{h}(t-t_1)+[f_3(t)-f_2(t)]\mathrm{h}(t-t_2) \qquad (*)}$$

وذلك لأنه في المجال $0\leq t<t_1$ يكون:

$$\mathrm{h}(t)=1,\ h(t-t_1)=0\ because\ t-t_1<0,\ h(t-t_2)=0\ because\ t-t_2<0\Rightarrow f(t)=f_1(t)$$

وفي المجال $t_1\leq t<t_2$ يكون:

$$\mathrm{h}(t)=1,\ h(t-t_1)=1\ \&\ \mathrm{h}(t-t_2)=0\Rightarrow f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]=f_2(t)$$

وفي المجال $t\geq t_2$ يكون:

$$\mathrm{h}(t)=1,\ h(t-t_1)=1\ \&\ \mathrm{h}(t-t_2)=1\Rightarrow f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]+[f_3(t)-f_2(t)]=f_3(t)$$

تُرتب العلاقة $(*)$ كما يلي

$$\boxed{f(t)=f_1(t)[\mathrm{h}(t)-h(t-t_1)]+f_2(t)[\mathrm{h}(t-t_1)-h(t-t_2)]+f_3(t)\mathrm{h}(t-t_2) \qquad (**)}$$

تعتبر هاتين العلاقتين قياسيتين وتستخدمان في التطبيقات الهندسية .

مثال (2.5-1): أكتب بدلالة دالة الخطوة الواحدة الدالة المستمرة جزئياً التالية:

$$f(t)=\begin{cases}2t^2 & ; \quad 0\le t<3\\ t+4 & ; \quad 3\le t<5\\ 9 & ; \quad t\ge 5\end{cases}$$

الحل: بحسب العلاقة $(*)$ لدينا

$$\begin{aligned}f(t)&=2t^2\,\mathrm{h}(t)+[t+4-2t^2]\,\mathrm{h}(t-3)+[9-t-4]\,\mathrm{h}(t-5)\\&=2t^2\,\mathrm{h}(t)+(4+t-2t^2)\,\mathrm{h}(t-3)-(t-5)\,\mathrm{h}(t-5)\end{aligned}$$

مثال (2.5-2): أكتب بدلالة دالة الخطوة الواحدة الدالة المستمرة جزئياً التالية:

$$f(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t<1\\ 1 & ; \quad 1\le t<3\\ 3 & ; \quad 3\le t<5\\ 2 & ; \quad 5\le t<6\\ 0 & ; \quad t\ge 6\end{cases}$$

الحل: بحسب العلاقة $(*)$ لدينا

$$\begin{aligned}f(t)&=1h(t-1)+(3-1)\,\mathrm{h}(t-3)+(2-3)\,\mathrm{h}(t-5)+(0-2)\,\mathrm{h}(t-6)\\&=1h(t-1)+2h(t-3)-h(t-5)-2h(t-6)\end{aligned}$$

iv) تحويل لا بلاس للدالة $a\ge 0$; $\mathrm{h}(t-a)$ يعين من تعريف تحويل لا بلاس كما يلي:

$$L[\mathrm{h}(t-a)]=\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{h}(t-a)dt=\int_a^\infty e^{-st}(1)dt=\lim_{r\to\infty}\int_a^r e^{-st}dt=\lim_{r\to\infty}[-e^{-st}/s]_{t=a}^{r}=e^{-as}/s\ ;\ s>0$$

هذا يعني أن $\boxed{L[\mathrm{h}(t-a)]=e^{-as}/s \quad ; a\ge 0 \quad \Rightarrow \quad L[\mathrm{h}(t)]=1/s}$

وبالتالي: $\boxed{L^{-1}[e^{-as}/s]=h(t-a) \quad \Rightarrow \quad L^{-1}[1/s]=h(t)}$

مبرهنة الإزاحة الثانية (The second shift theorem)

1) إذا كان $L[f(t)]=F(s)$ و a ثابت موجب فإن $\boxed{L[f(t-a)\,\mathrm{h}(t-a)]=\mathrm{e}^{-as}F(s)}$

2) وإذا كان $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ و a ثابت موجب فإن $\boxed{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)\,h(t-a)}$

برهان: إن $L[f(t-a)\,h(t-a)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t-a)\,h(t-a)dt=\int_a^{\infty}e^{-st}f(t-a)dt$

وإذا وضعنا $u=t-a$ فإن $du=dt$ وبالتالي

$$L[f(t-a)\,h(t-a)]=\int_a^{\infty}e^{-st}f(t-a)dt=\int_0^{\infty}e^{-s(u+a)}f(u)du=e^{-as}\int_0^{\infty}e^{-su}f(u)du=e^{-as}F(s)$$

مثال (2.5-3): أوجد تحويل لا بلاس للدالة

$$f(t)=\begin{cases}2t^2 & ; \quad 0\le t<3\\ t+4 & ; \quad 3\le t<5\\ 9 & ; \quad t\ge 5\end{cases}$$

الحل: يعين تحويل لا بلاس لهذه الدالة بالاعتماد على مبرهنة الإزاحة الثانية ، الذي يتطلب :

i)كتابة الدالة المستمرة جزئياً بدلالة دالة الدرجة الواحدة

ii) كتابة جميع الحدود في الدالة الناتجة وفق الصيغة $f(t-a)\,h(t-a)$ يتم ذلك كما يلي:

$$\begin{aligned}f(t)&=2t^2\,h(t)+(4+t-2t^2)\,h(t-3)+(9-t-4)\,h(t-5)\\&=2t^2\,h(t)-(2t^2-t-4)\,h(t-3)-(t-5)\,h(t-5)\\&=2t^2\,h(t)-2[(t-3)^2+5.5(t-3)+5.5]\,h(t-3)-(t-5)\,h(t-5)\\&=2t^2\,h(t)-2(t-3)^2\,h(t-3)-11(t-3)\,h(t-3)-11h(t-3)-(t-5)\,h(t-5)\end{aligned}$$

iii) نطبق مبرهنة الإزاحة الثانية فنحصل على

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=2L[t^2\,h(t)]-2L[(t-3)^2\,h(t-3)]-11L[(t-3)\,h(t-3)]-11L[h(t-3)]-L[(t-5)\,h(t-5)]\\&=2L[t^2]-2e^{-3s}L[t^2]-11e^{-3s}L[t]-11L[h(t-3)]-e^{-5s}\,L[t]\\&=2(2/s^3)-2e^{-3s}(2/s^3)-11e^{-3s}(1/s^2)-11e^{-3s}/s-e^{-5s}(1/s^2)\\&=\frac{4}{s^3}-e^{-3s}(\frac{4}{s^3}+\frac{11}{s^2}+\frac{11}{s})-\frac{e^{-5s}}{s^2}\end{aligned}$$

مثال (2.5-4): احسب $1)L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}]$, $2)L^{-1}[\frac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}]$

الحل: بمقارنة $L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}]$ مع الطرف الأيسر من المساواة $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)\,h(t-a)$

نجد أن $F(s)=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2})$ و $a=4$ وبالتالي $f(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$ ومنه

$$L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}]=\mathrm{f(t-4)\,h(t-4)}=\frac{1}{2}[1-e^{-2(t-4)}]\,\mathrm{h}(t-4)=\begin{cases}0 & ;t<4\\ [1-e^{-2(t-4)}]/2 & ;t\geq 4\end{cases}$$

وبمقارنة $L^{-1}[\frac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}]$ مع الطرف الأيسر من المساواة $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)\,\mathrm{h}(t-a)$

نجد أن $a=\pi$ و $F(s)=\frac{s+3}{s(s^2+1)}=\frac{3}{s}-3\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow f(t)=3-3\cos t+\sin t$

وبالتالي

$$L^{-1}[\frac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}]=[3-3\cos(\mathrm{t}-\pi)+\sin(\mathrm{t}-\pi)]\,\mathrm{h}(\mathrm{t}-\pi)=(3+3\cos\mathrm{t}-\sin\mathrm{t})\,\mathrm{h}(\mathrm{t}-\pi)$$

$$=\begin{cases}0 & ;\quad \mathrm{t}<\pi\\ 3+3\cos t-\sin t & ;\quad t\geq\pi\end{cases}$$

(2.6) **تحويل لا بلاس لدالة النبضة الواحدة** (Unit impulse function):

من الظواهر الفيزيائية التي تطبق في المشافي وغيرها من الأماكن ظاهرة الصدمات الكهربائية . الصدمة الكهربائية تعني، وصل التيار الكهرباء لجسم مريض توقف قلبه فجأة عن العمل لفترة زمنية قصيرة جداً جداً تقدر بـ ε حيث $\varepsilon\cong 0$ ولكن $\varepsilon\neq 0$ (أي $\varepsilon\to 0$) ، فالصدمة الكهربائية وتأثيرها على جسم المريض مماثلة تماماً لمستطيل مساحته ثابتة تساوي واحدة المساحة وعرضه ε وبالتالي طوله(أو ارتفاعه) $1/\varepsilon$ ، وهذا يعني أنه، يقابل تناقص العرض زيادة الطول ولكن مع بقاء المساحة ثابتة وتساوي واحدة المساحة ، وهذا يعني رياضياً وجود دالة تسمى دالة النبضة الواحدة (أو تسمى الدالة دلتا) يرمز لها بـ $\delta(t)$ وتُعرف كما يلي:

$$\delta(t)=\begin{cases}1/\varepsilon ; & 0<t<\varepsilon\\ 0 \quad ; & t\notin]0,\varepsilon[\end{cases}$$

وذلك إذا كان تأثير النبضة عند $t=0$ و لكن إذا كان تأثيرها عند $t=a$ فيرمز لها بـ $\delta(t-a)$ حيث $a\geq 0$ وتُعرف كما يلي :

$$\delta(t-a)=\begin{cases}1/\varepsilon & ;\quad 0<t-a<\varepsilon\\ 0 & ;\quad elsewhere\end{cases}\qquad =\begin{cases}1/\varepsilon & ;\quad a<t<a+\varepsilon\\ 0 & ;\quad t\notin]a,a+\varepsilon[\end{cases}\quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\infty & ;\quad t=a\\ 0 & ;\quad t\neq a\end{cases}$$

هذا يعني أن

$$\boxed{\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & ;\quad t=a\\ 0 & ;\quad t\neq a\end{cases}\qquad (1)}$$

تمثل هذه الدالة بيانيّاً بمستقيم رأسي متوج بسهم يتجه نحو الأعلى عند $t=a$ ،

كيف ترسم شكل توضيحي للدالة $\delta(t-a)$ ؟

بحسب تعريف هذه الدالة فإن تكاملها ضمن أي مجال يحوي العدد الحقيقي الموجب a يساوي الواحد، فإذا كان $p<a<q$ فإن :

$$\boxed{\int_p^q \delta(t-a)dt=1; \quad p<t<q \quad (2)}$$

وإذا كانت $g(t)$ دالة حقيقية فإن دالة الجداء $g(t)\cdot\delta(t-a)$ تساوي الصفر ضمن المجال $p<t<q$ إلا عند $t=a$ وفي هذه الحالة يكون:

$$\boxed{\int_p^q g(t)\cdot\delta(t-a)dt=\int_a^{a+\varepsilon} g(a)(1/\varepsilon)dt=g(a)(1/\varepsilon)\int_a^{a+\varepsilon}dt=g(a) \qquad (3)}$$

فمثلاً،

$$1)\int_2^5 (t^2-6)\cdot\delta(t-4)dt=4^2-6=10,$$

$$2)\int_0^\pi \sin 3t\cdot\delta(t-\pi/2)dt=\sin(3\pi/2)=-1$$

$$3)\int_0^4 5\delta(t-6)dt=0,$$

$$4)\int_0^4 5\delta(t-3)dt=5$$

ينتج مما سبق التالي

$$\boxed{\begin{array}{ll} L[\delta(t-a)]=\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)dt=e^{-as} & \Rightarrow \quad L^{-1}[e^{-as}]=\delta(t-a) \\ L[g(t)\cdot\delta(t-a)]=\int_0^\infty g(t)e^{-st}\cdot\delta(t-a)dt=g(a)e^{-as} & \Rightarrow L^{-1}[g(a)e^{-as}]=g(t)\delta(t-a) \qquad (4) \end{array}}$$

فمثلاً، $L[\delta(t)]=1 \;\Rightarrow\; L^{-1}[1]=\delta(t), \quad L[\delta(t-1)]=e^{-s} \;\Rightarrow\; L^{-1}[e^{-s}]=\delta(t-1)$

مثال (2.6-1): عيّن $f(t)$ إذا علمت أن $L[f(t)]=F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+4}$

الحل: تُكتب الدالة $F(s)$ على الشكل التالي

$$L[f(t)]=F(s)=\frac{s^2}{s^2+4}=\frac{s^2+4-4}{s^2+4}=1-\frac{4}{s^2+4}\Rightarrow f(t)=L^{-1}[1]-2L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]=\delta(t)-2\sin 2t$$

(2.7) **تحويل لا بلاس لدالة دورية** (Laplace transform of a periodic function)

مبرهنة (2.7-1) : إذا كانت الدالة $f(t)$ معرفة من أجل كل $t\ge 0$ ودورية دورها T فمن أجل كل عدد

صحيح n يكون $f(t+nT)=f(t)$ و $\boxed{L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt}$

مثال (2.7-1): عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)$ التي دورها 4 ومعرفة كما يلي:

$$f(t)=\begin{cases}3t\ ; & 0\le t<2\\ 6\ ; & 2\le t<4\end{cases}$$

الحل: إن $L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 e^{-st}f(t)dt$ ولذلك نحسب التكامل في هذه المساواة فنحصل على:

$$\int_0^4 e^{-st}f(t)dt=\int_0^2 e^{-st}(3t)dt+\int_2^4 e^{-st}(6)dt=3[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}]_0^2-\frac{6}{s}[e^{-st}]_2^4$$
$$=3[-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}]-\frac{6}{s}[e^{-4s}-e^{-2s}]=\frac{3-3e^{-2s}-6s\,e^{-4s}}{s^2}$$

وبالتالي $L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 e^{-st}f(t)dt=\frac{3-3e^{-2s}-6s\,e^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}\quad;\quad s>0$

(2.8) **مبرهنة الطي** (Convolution theorem):

إذا كان $L[g(t)]=\mathrm{G(s)}$ و $L[r(t)]=R(s)$ فإن تحويل لا بلاس العكسي للدالة $F(s)=G(s)\cdot R(s)$ يعين من العلاقة $\boxed{f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[G(s)R(s)]=\int_0^t g(\tau)r(t-\tau)d\tau}$

مثال (2.8-1): عيّن تحويل لا بلاس العكسي للدالة $F(s)=\frac{1}{s^2(s-a)}$

الحل: إذا كان $G(s)=1/s^2$ فإن $g(t)=t$ وإذا كان $R(s)=\frac{1}{s-a}$ فإن $r(t)=e^{at}$ وبالتالي

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}]=\int_0^t \tau\cdot e^{a(t-\tau)}d\tau=e^{at}\int_0^t \tau\cdot e^{-a\tau}d\tau=e^{at}[-\frac{\tau e^{-a\tau}}{a}+\frac{1}{a}(-\frac{e^{-a\tau}}{a})]_0^t$$
$$=\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$$

(2.9) **أمثلة محلولة** (Worked examples) :

مثال (2.9-1): دارة كهربائية تضم على التسلسل مقاومة $R=240\Omega$ ومكثف $C=5\times10^{-5}F$ وملف $L=2H$ ومنبع جهد $E=30v$ ومفتاح توصيل لغلق وقطع الدارة. قبل غلق الدارة وعند الزمن $t=0$ شحنة المكثف والتيار في الدارة يساويان الصفر. لحظة غلق الدارة يعبرها التيار $i(t)$ عيّن عبارة $i(t)$

الحل: نعلم أن هبوط الجهد في المقاومة يساوي $R \cdot i$ وفي الملف يساوي Ldi/dt وفي المكثف $(1/c)\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ ونعلم أيضاً أن مجموع هبوط الجهد في الحلقة (في الدارة المغلقة) يساوي الصفر، هذا يعني أن $240i(t)+\frac{1}{5\times10^{-5}}\int_0^t i(\tau)d\tau+2\frac{d\,i(t)}{dt}=30$

وبتطبيق تحويل لا بلاس للطرفين نحصل على المعادلة الجبرية التالية:

$$240I(s)+\frac{20000I(s)}{s}+2[s\,I(s)-0]=\frac{30}{s} \quad \Rightarrow$$
$$I(s)=\frac{15}{s^2+120s+10^4}=\frac{15}{(s+60)^2+(80)^2}=\frac{3}{16}\cdot\frac{80}{(s+60)^2+80^2} \quad \Rightarrow \quad i(t)=\frac{3}{16}\cdot e^{-60t}\sin 80t$$

مثال (2.9-2): دالة دورية دورها 2 ومعرفة كما يلي:

$$f(t)=\begin{cases}1 & ; \quad 0<t<1\\ -1 & ; \quad 1<t<2\end{cases}$$

والمطلوب:

1) أكتب هذه الدالة بدلالة دالة الخطوة الواحدة $\mathrm{h}(t-a)$ من أجل $a=0,1,2,3,\cdots$ ثم عيّن تحويل لا بلاس للعبارة التي يتم الحصول عليها،

2) استخدم المبرهنة (2.7-1) وعيّن تحويل لا بلاس لهذه الدالة الدورية

الحل: 1) ضمن مجال تعريف الدالة الذي طوله 2 يكون :

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{h}(t)-h(t-1) & ; \quad 0<\mathrm{t}<1\\ -[\mathrm{h}(t-1)-h(t-2)] & ; \quad 1<t<2\end{cases}$$

وفي المجال الذي يليه حيث طوله 2 يكون

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{h}(t-2)-h(t-3) & ; \quad 2<\mathrm{t}<3\\ -[\mathrm{h}(t-3)-h(t-4)] & ; \quad 3<t<4\end{cases}$$

وهكذا بالنسبة للمجالات المتتالية التي طول كل منها 2 وهذا يعني أنه في المجال $t>0$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}f(t)&=[\mathrm{h}(t)-h(t-1)]-[\mathrm{h}(t-1)-h(t-2)]+[\mathrm{h}(t-2)-h(t-3)]-[\mathrm{h}(t-3)-h(t-4)]+\cdots\\ &=h(t)-2h(t-1)+2h(t-2)-2h(t-3)+\cdots\end{aligned}$$

وتحويل لا بلاس لهذه السلسلة يعين كما يلي :

$$L[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}[1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - \cdots]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s(1+e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

2) بالتطبيق المباشر للمبرهنة (2.7-1) نحصل على التالي:

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt\right] = \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})} \cdot \frac{(1-e^{-s})^2}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

مثال (2.9-3): عيّن حل المعادلة التفاضلية العادية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 1 + \delta(t-4)$$

الذي يحقق الشرطين التاليين:

$$x(0) = 0 \quad \& \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

الحل: تحل هذه المعادلة فقط بطريقة تحويل لا بلاس (لماذا؟) بأخذ تحويل لا بلاس للطرفين نحصل على المعادلة الجبرية

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = \frac{1}{s} + e^{-4s}$$

التي تكتب على الشكل التالي:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)} + \frac{e^{-4s}}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+1}\right] + e^{-4s}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right]$$

بأخذ تحويل لا بلاس العكسي للطرفين والاستفادة من العلاقة $L^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)\,\mathrm{h}(t-a)$ نحصل على:

$$x(t) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2t} - 2e^{-t}] + [e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)}]\,\mathrm{h}(t-4)$$

$$= \begin{cases} (1/2)(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}) & ; \quad 0 \le t < 4 \\ 1/2 + (e^4 - 1)e^{-t} - (e^8 - 1/2)e^{-2t} & ; \quad t \ge 4 \end{cases}$$

مثال (2.9-4): حل مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$y''(t) + \mathrm{y}(t) = \mathrm{f}(t) = \begin{cases} 3 & ; \quad 0 \le t < 2 \\ -1 & ; \quad 2 < t < 4 \\ 0 & ; \quad t \ge 4 \end{cases}$$

علماً بأن $y(0)=0 \,\&\, y'(0)=0$

الحل: لا يمكن حل هذه المسألة بأية طريقة من الطرائق التي عُرضت بمقرر الرياضيات(3) لأن الدالة $f(t)$ غير مستمرة ، ولذلك نأخذ تحويل لا بلاس للطرفين فنحصل على $(s^2+1)Y(s)=F(s)$ حيث

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^2 3e^{-st}dt-\int_2^4 e^{-st}dt+0=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s(s^2+1)}=\frac{3}{s(s^2+1)}-4\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}+\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)} \quad \Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=3L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}]-4L^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}]+L^{-1}[\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}]$$

لكن $L^{-1}[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}]=1-\cos t$ و $L^{-1}[e^{-as}\,\mathrm{F}(s)]=\mathrm{f(t-a)\,h(t-a)}$ وبالتالي

$$y(t)=3(1-\cos t)-4[1-\cos(t-2)]\,\mathrm{h}(t-2)+[1-\cos(t-4)]\,\mathrm{h(t-4)}$$

$$=\begin{cases}3(1-\cos t) & ; \quad 0\le t<2\\ -1-3\cos t+4\cos(t-2) & ; \quad 2<t<4\\ -3\cos t+4\cos(t-2)-\cos(t-4) & ; \quad t\ge 4\end{cases}$$

مثال (2.9-5): شبكة كهربائية ينتج عنها الجملة التالية:

$$2\frac{di}{dt}+80i_1(t)=200\cos 20t$$
$$2\frac{di}{dt}+4\frac{di_2(t)}{dt}=200\cos 20t$$

حيث $i(t)$ يرمز للتيار في الشبكة $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$ و $\mathrm{i}(0)=0$ عيّن كلًا من $i, i_1 \,\&\, i_2$

الحل: نكتب الجملة بدلالة $i(t)\,\&\, i_1(t)$ فنحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$2\frac{di}{dt}+80i_1(t)=200\cos 20t$$
$$2\frac{di}{dt}+4[\frac{di}{dt}-\frac{di_1}{dt}]=200\cos 20t$$

وهذه الجملة تكتب على الشكل التالي:

$$2\frac{di}{dt}+80i_1(t)=200\cos 20t$$
$$6\frac{di}{dt}-4\frac{di_1}{dt}=200\cos 20t$$

بأخذ تحويل لا بلاس لطرفي هذه الجملة نحصل على الجملة الجبرية التالية:

$$2s\,I(s)+80\,I_1(s)=200\frac{s}{s^2+400}$$
$$6s\,I(s)-4s\,I_1(s)=200\frac{s}{s^2+400}$$

بحذف $I_1(s)$ بين هاتين المعادلتين الجبريتين نحصل على

$$I(s)=\frac{100(s+20)}{(s+60)(s^2+400)}=-\frac{1}{s+60}+\frac{s}{s^2+400}+(2)\frac{20}{s^2+400}$$

وبأخذ تحويل لا بلاس العكسي لطرفي هذه العلاقة نحصل على : $i(t)=-e^{-60t}+\cos 20t+2\sin 20t$

إذا عوضنا في المعادلة الأولى من الجملة المعطاة نحصل على

$$i_1(t)=1.5\cos 20t+0.5\sin 20t-1.5e^{-60t}\quad\Rightarrow$$
$$i_2(t)=i(t)-i_1(t)=0.5(e^{-60t}+3\sin 20t-\cos 20t)$$

هل يمكن رسم الشبكة للجملة المعطاة ؟

(2.10) **تمارين غير محلولة** (Exercises):

1) عيّن تحويل لا بلاس للدالة $f(t)=t^2e^{-2t}+e^{-t}\cos 2t+3$

2) عيّن تحويل لا بلاس العكسي للدالة $F(s)=\dfrac{3s^2-7s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

3) عيّن $g(t)$ إذا علمت أن تحويل لا بلاس لها هو $G(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+10)}$

4) مثّل بيانياً الدوال التالية: $i)\,\mathrm{h}(t)\,,\,ii)\,\mathrm{h}(t-1)\,,iii)\,\mathrm{h}(t-1)-h(t-2)\,,iv)\,\mathrm{h}(t)\sin t\,,\mathrm{v})\,\mathrm{h}(t-1)\sin t$

5) مثّل بيانياً الدوال $f(t)=2t^2\,\mathrm{h}(t)+(4+t-2t^2)\,\mathrm{h}(t-3)-(t-5)\,\mathrm{h}(t-5)$ $\quad\delta(t)\,\&\,\delta(t-2)$

7) عيّن $f(t)$ إذا علمت أن $f(t)=L^{-1}[\dfrac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+4)}]$ وعيّن $g(t)$ إذا علمت أن $G(s)=\dfrac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}$

10) استخدم تحويل لا بلاس وعيّن من أجل $t\geq 0$ حل المعادلة $\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)$

علماً بأن $x(0)=0,\quad x'(0)=0\quad \&\quad f(t)=\begin{cases}3 & ; \quad 0\leq t<6\\ 0 & ; \quad t\geq 6\end{cases}$